ESERCIZI - RISOLUZIONI

1) eq. differenziali

- VARIABILI SEPARABILI

$$y' = a(t)\,b(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t)\,dt \Rightarrow \varphi(t) = B^{-1}(A(t) + c)$$

- LINEARI DI PRIMO ORDINE

a) OMOGENEE

$$y' + a(t)y = 0 \qquad \varphi(t) = ce^{-A(t)}$$

b) NON OMOGENEE

$$y' + a(t)y = f(t) \qquad \varphi(t) = ce^{-A(t)} + B(t)e^{-A(t)}$$

$$\hookrightarrow B(t) = \int f(t)e^{A(t)}$$

- LINEARI DI SECONDO ORDINE

a) OMOGENEE

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \qquad y(t) = y_{OM}(t)$$

$y_{OM}(t)$ si ricava col polinomio caratteristico:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

- $\Delta > 0 \Rightarrow y_{OM}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
- $\Delta = 0 \Rightarrow y_{OM}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_1 t}$
- $\Delta < 0 \Rightarrow y_{OM}(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

con $\lambda_1 = \alpha + i\beta$

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$

b) NON OMOGENEE

$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$ $\qquad y(t) = y_{OM}(t) + \bar{y}_{NON\,OM}(t)$

- Se $f(t)$ è un POLINOMIO di grado n, la soluzione dovrà essere scelta coerentemente col grado dell'equazione stessa.
- $ay'' + by' + cy = f \Rightarrow \bar{y}(t) =$ POL. DI GRADO n, dove n è il grado del forzante.
- $ay'' + by' = f \Rightarrow \bar{y}(t) = (\text{POL. DI GRADO } n) \cdot t$, perché la somma delle derivate 1ª e 2ª deve essere di grado n. Poiché il grado diminuisce di 1 (derivando), scegliendo un polinomio di grado n+1 avrò un polinomio di grado n che "vince" al 1° membro:
  $gr(n-1) \cdot a + gr(n) b = f \rightarrow gr(n)$
- $ay'' = f \Rightarrow \bar{y}(t) = t^2 \cdot (\text{POL. DI GRADO } n)$ per lo stesso motivo.

POL. GEN. DI GRADO $n = At^2 + Bt + C$.

- Se $f(t)$ è di tipo: $f(t) = (\text{POL. DI GRADO } n) \cdot e^{ht}$

$\Rightarrow \bar{y}(t) = \underbrace{t^M}_{} \cdot (\text{POL. GEN. DI GRADO } n) \cdot e^{ht}$ $\rightarrow$ grado FORZANTE

$\rightarrow$ DA INSERIRE SSE h È SOLUZIONE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO, CON $M = 1$ SE h HA MOLTEPLICITÀ 1, $M = 2$ SE HA MOLT. 2

- Se $f(t) = k_1 \cos ht + k_2 \sin ht$

  $\Rightarrow \bar{y}(t) = t \cdot (\underbrace{A \cos ht + B \sin ht}_{\text{generici}})$

  t da inserire sse ih è sol. dell'eq caratteristica.

- Se $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \Rightarrow \bar{y}(t) = \bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t)$

  si trova con uno dei casi precedenti

  → sono soluzioni particolari

2) ROBE SU F. A 2 VARIABILI

a) DERIVATE DIREZIONALI

$$\frac{\partial f(P)}{\partial v} = \langle \nabla f(P_0, P_1), \frac{v}{\|v\|} \rangle$$

→ la derivata direzionale è:

- MAX se è nella direzione individuata dal gradiente NORMALIZZATA
- MIN come sopra ma con segno invertito
- NULLA quando $\langle \nabla f_{NORM}(P_0, P_1), \frac{v}{\|v\|} \rangle = 0$

b) MATRICE HESSIANA

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

- $\det H < 0$ → PUNTO DI SELLA
- $\det H > 0$
  - $f_{xx} > 0$ → PUNTO DI MINIMO
  - $f_{xx} < 0$ → PUNTO DI MASSIMO

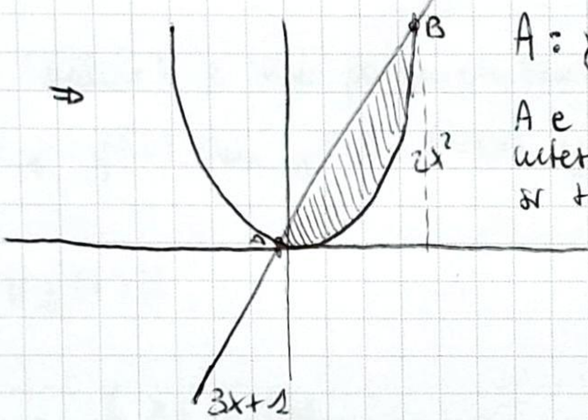
c) MAX/MIN VINCOLATI - metodo generale risolutivo

- Dato un vincolo $A = \{(x,y) : -\}$ e $f(x,y)$:

1. CERCARE L'INSIEME DEFINITO SU A RAFFIGURANDOLO SU UN GRAFICO PER SEMPLICITÀ.

es: $A : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq 3x + 1\}$

$$A : \begin{cases} y \geq 2x^2 \\ y \leq 3x+1 \end{cases} \Rightarrow$$



FRONTIERA

$A : \gamma_1 + \gamma_2 \in [A, B]$

A e B sono i punti di interс. fra le curve, che si trovano uguagliando le eq. delle curve stesse.

2. CONTROLLARE SE I PUNTI IN CUI IL GRADIENTE È NULLO RIENTRANO NELLA RESTRIZIONE (AKA SE X E SE Y STANNO IN [A,B]).

   ↳ SÌ → teniamoli da parte
   NO → CIAO

3. RIDURRE $f(x,y)$ ALLE SINGOLE RESTRIZIONI E STUDIARNE MAX E MIN CON I METODI DI ANALISI I (DERIVATA 1ª)

$\gamma_1 : f(x, \gamma_1)$ o $f(\gamma_1, y)$
$f(x, \gamma_2)$ o $f(\gamma_2, y)$

IN QUESTO ESEMPIO:
$f(x, 2x^2)$
$f(x, 3x+1)$

N.B: I PUNTI TROVATI IN QUESTO MODO SARANNO DELLE X SULLE RESTRIZIONI, PERTANTO, UNA VOLTA SOSTITUITI NELL'EQUAZIONE DELLA CURVA RIDOTTA NON SI TROVERÀ LA Y CORRISPONDENTE, BENSÌ LA Z (QUOTA) DEL PUNTO, POICHÉ LA QUOTA DI UNA RESTRIZIONE È LA STESSA DELLA F. NON RISTRETTA.
POSTO, QUINDI, $f(x, \gamma)$, DATO IL P.TO STAZIONARIO $x_0 \Rightarrow$

$f(x_0, \gamma) = z_0 \rightarrow$ QUOTA IN $f(x_0, y)$ → NON DETERMINATO

PER TROVARE $y \Rightarrow z_0 = f(x_0, y)$ eq. in y, poiché z_0, x_0 sono noti

4. CONFRONTARE LE QUOTE DEI PUNTI TROVATI
DATI I PUNTI A, B, AD ESEMPIO, LE LORO QUOTE SONO:

$A(0,1)$ $\quad f(0,1) = z_1$ | IN BASE AL LORO VALORE
$B(1,2)$ $\quad f(1,2) = z_2$ | A, B SONO P.TI DI MAX O MIN.

3) INTEGRALI DI $1^a/2^a$ SPECIE + POTENZIALE E 1-FORME DIFFERENZIALI

a) INT. DI 1^a SPECIE

Data una $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (scalare) e una parametrizzazione $\varphi(t)$, l'integrale sulla curva $\gamma: \varphi(t)$; con $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (in 2 var) è dato da:

$$\int_\gamma f(x(t), y(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|$$

es:

Se $f(x) = 2xy$ e $\varphi(t) = \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = \cos(t) \end{cases}$ e $\dot{\varphi}(t) = (-\sin(t), \cos(t), -\sin(t))$

$t \in [0, \pi/2]$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} 2\cos t \sin t \sqrt{\underbrace{\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1} + \sin^2 t}} = \int_0^{\pi/2} 2\cos t \sin t \cdot \sqrt{1 + \sin^2 t}$$

$\to$ Se $f(t) = 1 \Rightarrow$ LUNGHEZZA CURVA

$$L(\gamma) = \int_\gamma \|\dot{\varphi}(t)\|$$

SE VIENE RICHIESTA LA MASSA DI UN FILO NON OMOGENEO CI SI RIFÀ AL PRIMO CASO, POICHÉ LA DENSITÀ È ESPRESSA DA UNA FUNZIONE NON COSTANTE (IN QUESTO CASO $2xy$).

b) INT. DI 2ª SPECIE

Dato un campo di forze $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e una curva parametrizzata $\gamma: \varphi(t): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\gamma: \begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{cases}$, l'integrale di seconda specie di F su γ è:

$$L = \int_\gamma F \cdot dl = \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

c) POTENZIALE E 1-FORME

Dato $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, esso ammette potenziale in A, con A dominio del campo, se $\exists U: \mathbb{R}^n \supseteq A \to \mathbb{R}$ (OCCHIO, IL POT. È SCALARE!!), t.c. $\exists \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, \dots$ e $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1, \frac{\partial U}{\partial y} = F_2, \dots$

$\Rightarrow \exists U$ sse (es. $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \end{cases}$$

N.B: C.N.: F DEVE ESSERE IRROTAZIONALE

$\Rightarrow \text{rot}\,\underline{F} = 0$ ie

$$\rightarrow \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \underline{0}$$

es: calcolare, se esiste, il potenziale di $F(x,y,z) = (2y+1, 2x-1, 2z)$

$Dom(F) = \mathbb{R}^3 \rightarrow$ è CONNESSO SEMPLICEMENTE

$\hookrightarrow$ se F è irrotaz $\Rightarrow$ ammette potenziale

Calcoliamo rot F =

$$\text{rot}\,F = (0 - 0, 0 - 0, 0 - 0) = (0, 0, 0)$$

2 dy   2x-1 dz

$\hookrightarrow$ CAMPO IRROT

$\rightarrow$ PUÒ AMMETTERE POTENZIALE!

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 2y+1 & 1) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = 2x-1 & 2) \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = 2z & 3 \end{cases}$$

• 1 $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 2y+1 \Rightarrow U = \int 2y+1\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow U = 2xy + x + c(y,z) \rightarrow$ funzione "costante" dipendente da z, y, risultante dal fatto che le d. parziale di U in x tiene costanti le variabili y e z!

Pertanto U può essere scritto come:

$U = 2xy + x + c(y,z)$

• 2 $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 2x+1$, poiché $U = 2xy + x + c(y,z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\partial(2xy + x + c(y,z))}{\partial y} = 2x-1$

$\Rightarrow \cancel{2x} + 0 + c'(y,z) = \cancel{2x} - 1$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$\Rightarrow c'(y,z) = -1$

$\Rightarrow c(y,z) = \int -1\,dy \rightarrow c(y,z) = -y + k(z)$

~~[illegible]~~

$\Rightarrow U = 2xy + x \underbrace{-y + k(z)}_{\rightarrow c(y,z)} \rightarrow$

• 3 $\frac{\partial U}{\partial z} = 2z \Rightarrow \frac{\partial (2xy + x - y + k(z))}{\partial z} = 2z \Rightarrow 0 + 0 - 0 + k'(z) = 2z$

$\Rightarrow k(z) = \int 2z \Rightarrow k(z) = z^2 + C \rightarrow$ costante del potenziale

$$\Rightarrow U(x, y, z) = 2xy + x - y + z^2 + C$$

N.B: Se un campo è conservativo $\Leftrightarrow$ ammette potenziale
Se un campo è cons. la forma diff. ad esso associata è detta
ESATTA!
SE ROT F = 0 $\Rightarrow$ LA FORMA È CHIUSA!

SE $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ è irrotazionale e A è sempl. connesso (o stellato)

$\Rightarrow F$ ammette pot.
Se un campo è conservativo il lavoro dipende solo dal potenziale!